

بہ نسبت خدا
 - آنٹروپی

$$\underline{H(X)} = \sum_{x \in X} P(x) \log \frac{1}{P(x)}$$

آنٹروپی

$$= E \left\{ \log \frac{1}{P(X)} \right\} = - E \{ \log P(X) \}$$

$$X = \begin{cases} a & \frac{1}{2} \\ b & \frac{1}{4} \\ c & \frac{1}{8} \\ d & \frac{1}{8} \end{cases}$$

$$H(X) = ?$$

مثال :

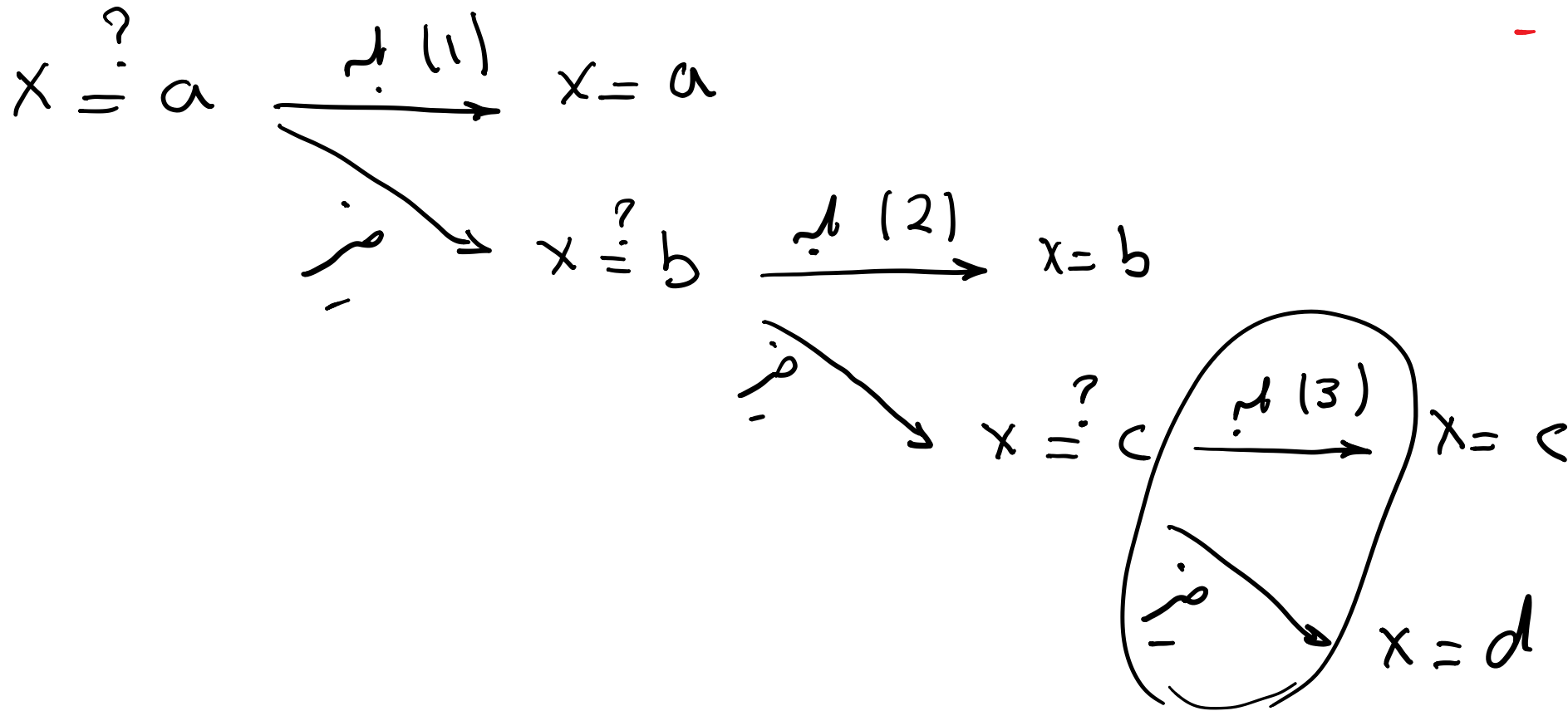
$$H(X) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \lg \frac{1}{p(x)}$$

$$= \frac{1}{2} \lg 2 + \frac{1}{4} \lg 4 + 2 \times \frac{1}{8} \lg 8$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{4} \times 3 = \frac{7}{4} \text{ bits}$$

2
 ✓
 مبنای 2 داریم

عسا بنده ملکی - خیر



مترسکه ای که در سوالات
پرسیده شده تا جواب

$$= 1 \left(\frac{1}{2} \right) + 2 \left(\frac{1}{4} \right) + 3 \left(\frac{1}{4} \right) = \frac{7}{4} = 1.75$$

- سوالات به صورت پهنه انتخاب شده بودند

در حالت کلی آنتردپی برابر کمینه متوسط خرد سرولاتی است که ما را به جواب

می رساند

$$H(x) \geq \text{میانگین خرد سرولات}$$

- آنتردپی توأم (مشترک)

آنتردپی توأم در متغیرهای (x, y) نشان دهنده میزان اطلاعاتی است که
آن دو متغیرهای x و y به صورت توأم دربردارند.

برای دو متغیرهای (x, y) با تابع احتمال توأم $P(x, y)$ ، آنتردپی توأم به صورت
زیر تعریف می شود.

$$H(x, y) = \sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{y \in \mathcal{Y}} p(x, y) \log \frac{1}{p(x, y)}$$

$$= - \sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{y \in \mathcal{Y}} p(x, y) \log p(x, y)$$

$$= - E \{ \log p(x, y) \}$$

- آنتروپی مشروط

$H(x|y)$ آنتروپی مشروط x به شرط y ، نشان دهنده میزان اطلاعات متغیر تصادفی x است، وقتی که متغیر تصادفی y مشخص باشد.

$$H(X|Y) = - \sum p(x|y) \log p(x|y)$$

$$H(X|Y=y) = - \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x|y) \log p(x|y)$$

$$\Rightarrow H(X|Y) = E_Y \{ H(X|Y=y) \}$$

$$= \sum_{y \in \mathcal{Y}} \left(- \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x|y) \log p(x|y) \right) P(y)$$

$$= - \sum_{y \in \mathcal{Y}} \sum_{x \in \mathcal{X}} \underbrace{p(x|y) P(y)}_{P(x,y)} \log p(x|y)$$

$$f(x|y) \equiv f(x|y=g) \leftarrow \text{حقیقی} \quad \text{قرار دارد}$$

$$F(x|y) \equiv F(x|y < g) \leftarrow \text{تزییح}$$

$$\Rightarrow H(x|y) = - \sum_x \sum_y P(x, y) \log P(x|y) = - E_{P(x, y)} \{ \log P(x|y) \}$$

$$\xRightarrow{\text{بهرین مشا}} H(y|x) = - \sum_x \sum_y P(x, y) \log P(y|x)$$

$$= - E_{\underline{P(x, y)}} \{ \log P(y|x) \}$$

* کتب الیہ

$$\underline{H(x, y)} = - \sum_x \sum_y P(x, y) \log P(x, y)$$

آنتروپی مشترک

$$= - \sum_x \sum_y P(x, y) \underbrace{\left[\log P(x|y) P(y) \right]}_{\log P(x|y) + \log P(y)}$$

$$= - \sum_x \sum_y P(x, y) \log P(x|y) - \sum_x \sum_y \underbrace{P(x, y)}_{P(y)} \log P(y)$$

$$= H(x|y) - \sum_y \left(\sum_x P(x, y) \right) \log P(y) = H(x|y) + H(y)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} H(x, y) = H(x) + H(y|x) \\ H(x, y) = H(y) + H(x|y) \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow H(x) + H(y|x) = H(y) + H(x|y)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1) \quad H(x) - H(x|y) = H(y) - H(y|x) \\ 2) \quad H(y|x) = H(x|y) \iff H(x) = H(y) \end{array} \right.$$

کیرالہ صند (شعبہ)

$$H(x, y | z) = H(x | z) + H(y | x, z) = H(y | z) + H(x | y, z)$$

$$H(x, y) = H(x) + H(y | x) = H(y) + H(x | y)$$

مثال: فرض کنیم تابع احتمال ترمین در مشیقه متن (x, y) به صورت زیر باشد،

مقدار $H(y|x)$ را به دست آورید.

y \ x	$\underline{a}_1$ $\underline{a}_2$			
	1	2	3	4
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$
3	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
4	$\frac{1}{4}$	0	0	0

$$H(y|x=1) = \sum_{y=1}^4 \underline{p}(y|x=1) \log_2 \frac{1}{\underline{p}(y|x=1)}$$

$$H(y|x=2)$$

$$H(y|x=3)$$

$$H(y|x=4)$$

$$\underline{P}(y|x=1) = \frac{P(y, x=1)}{P(x=1)} = \frac{\underline{a}}{1/2} = 2 \underline{a}_1$$

$$H(Y|X=1) = H(2 \underline{a}_1) = H\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4} \log 4 + \frac{1}{8} \log 8 + \frac{1}{8} \log 8 + \frac{1}{2} \log 2$$

$$= \frac{1}{4} \times 2 + \frac{2}{8} \times 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{4}$$

$$H(Y|X=2) = H(4 \underline{a}_2) = H\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0\right) =$$

$$H(Y|X=3) = H(8 \underline{a}_3) = H\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0\right) =$$

$$H(Y|X=4) = H(8 \underline{a}_4) = H\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0\right) =$$

$$\Rightarrow H(Y|X) = P(X=1)H(Y|X=1) + P(X=2)H(Y|X=2) \\ + P(X=3)H(Y|X=3) + P(X=4)H(Y|X=4)$$

$$= \frac{13}{8} \text{ bits}$$

$$H(X,Y) = ?$$

$$\text{ج. : } \frac{11}{8} \text{ bit}$$

بِعَنْدَانِ عَرَبِيَّ

$$H(X,Y) = ?$$

$$\text{ج. : } \frac{27}{8} \text{ bit}$$



آنتروپی نسبی

آنتروپی نسبی نشان دهنده فاصله بین دو تابع احتمال است. در واقع آنتروپی نسبی نشان دهنده میزان افت کارایی است اگر تابع احتمال متغیر تصادفی X را برابر $q(x)$ در نظر بگیریم و حالیکه توزیع درست آن برابر $P(x)$ باشد. آنتروپی نسبی را فاصله KL بین دو تابع احتمال نیز می گویند.

$KL : \text{Leibler} - \text{bank}$

فاصله KL برای دو تابع احتمال $P(x)$ و $q(x)$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$D(p(x) \parallel q(x)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{اصف},}}{=} D(P \parallel q)$$

$$= \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)}$$

لما يتم الجمع شأحت

likelihood Ratio

$$= E_{p(x)} \left\{ \log \frac{p(x)}{q(x)} \right\}$$

ما برآورد بازنه فاصله λ در تابع احتمال یک فاصله هندسی است، خاصیت طایفه

نذار در λ مساوی مثلثی را نیز برقرار نمی کند.

اطلاعات متقابل در متغیرهای (x, y)

اطلاعات متقابل در متغیرهای (x, y) نشان دهنده میزان اطلاعاتی است که یک متغیرهای x در مورد متغیرهای y را می دهد.

برای در متغیرهای (x, y) تابع احتمال توأم $P(x, y)$ روابط احتمال کناری

$P(x)$ و $P(y)$ ، اطلاعات متقابل به صورت زیر تعریف می شود،

$$I(x; y) \stackrel{\Delta}{=} D(P(x, y) \parallel P(x)P(y))$$

$$= E_{P(x, y)} \left\{ \log \frac{P(x, y)}{P(x)P(y)} \right\}$$

$$= \sum_x \sum_y P(x, y) \log \frac{P(x, y)}{P(x)P(y)}$$

در واقع اطلاعات متقابل در شریقه‌های (x, y) برابر با عدد k تابع احتمال نرمال
 آن‌ها نسبت به حاصل ضرب تابع احتمال کناری آن‌هاست.

کد برای محاسبه مقدار اطلاعات متبادل

$$I(x; y) = H(x) - H(x|y) \\ = H(y) - H(y|x)$$

قضیه:

$$I(x; y) = \sum_x \sum_y P(x, y) \lg \frac{P(x, y)}{P(x)P(y)}$$

$P(x)P(y|x)$

اثبات:

$$= \sum_x \sum_y P(x, y) \lg \frac{P(y|x)}{P(y)} \\ = \sum_x \sum_y P(x, y) [\lg P(y|x) - \lg P(y)]$$

$$\Rightarrow I(x; y) = \sum_x \sum_y p(x, y) \log p(y|x) - \sum_x \sum_y p(x, y) \log p(y)$$

$$= -H(y|x) - \sum_y \underbrace{\left(\sum_x p(x, y) \right)}_{p(y)} \log p(y)$$

$$= -H(y|x) - \underbrace{\sum_y p(y) \log p(y)}_{H(y)}$$

$$= H(y) - H(y|x)$$

$$\text{معلومات مشتركة} = H(x) - H(x|y)$$

در واقع $I(x; y)$ میزان کاهش ابهام در مورد x را نشان می‌دهد وقتی

اطلاعاتی در مورد y داشته باشیم

$$I(x; y) = H(x) - \underline{H(x|y)}$$

آنتروپی x وقتی
 y مشخص باشد
 ابهام در مورد x وقتی
 y مشخص باشد

آنتروپی x
 ابهام x

- برخی خواص تابع اطلاعات شتابل

$$1) I(x; y) = H(x) - H(x|y)$$

$$2) \quad \quad \quad = H(y) - H(y|x)$$

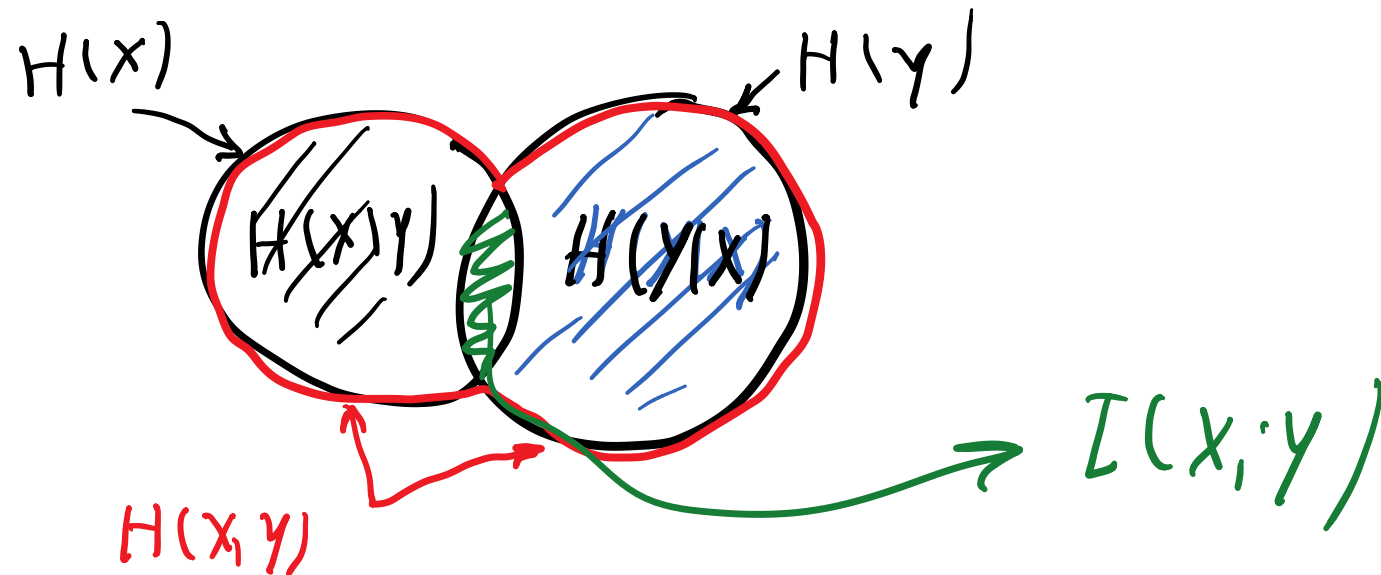
$$\underline{\underline{= H(x) + H(y) - H(x, y)}}$$

$$3) \quad \quad \quad H(x, y) = H(x) + H(y|x)$$

$$4) I(x; y) = I(y; x)$$

$$5) I(x; x) = H(x) - \underbrace{H(x|x)}_0 = H(x)$$

$$6) X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow I(x; y) = 0$$



مختارون

مختارون

